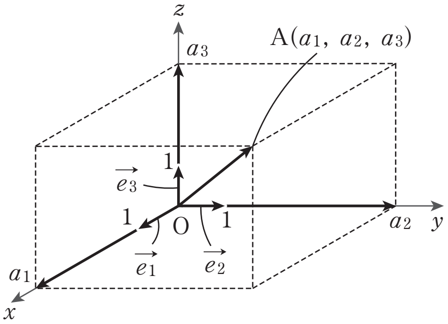
PART3 ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

要点① 空間のベクトルにおける成分

Oを原点とする座標空間において，x軸，y軸，z軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを「基本ベクトル」といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ で表す。



$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ の始点をOとすると，終点の座標はそれぞれ (1，0，0)，(0，1，0)，(0，0，1) である。

座標空間のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点Aをとったとき，その座標が $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ であるならば，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\quad\vec{e_1}+\quad\vec{e_2}+\quad\vec{e_3}$$

と，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ を用いてただ1通りに表される。この a_1，a_2，a_3 を，それぞれ $\vec{a}$ の「　　　」，「　　　」，「　　　」といい，

$$\vec{a}=$$

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の「　　　　」という。

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$，および零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，次のようになる。

$$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0),\quad \vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0),\quad \vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1),\quad \vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$$

成分表示された2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，次のことが成り立つ。

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2 \text{ かつ } a_3=b_3$$

また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，$|\vec{a}|$ は線分OAの長さであることより，次のことがいえる。

成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

要点② 成分表示されたベクトルの演算

成分表示された2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ の和，差，実数倍について，次のことが成り立つ。

成分表示されたベクトルの演算

$(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

$(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

$k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$　(k は実数)

例　$\vec{a}=(1,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -2)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 1,\ 2)+(2,\ 3,\ -2)=(\quad,\quad,\quad)=(\ ,\ ,\ )$

$4\vec{a}-2\vec{b}=4(1,\ 1,\ 2)-2(2,\ 3,\ -2)=(\ ,\ ,\ )-(\ ,\ ,\ )$

$=(\quad,\quad,\quad)=(\ ,\ ,\ )$

要点③ 座標と成分表示

座標空間の2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

であることより

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)-(a_1,\ a_2,\ a_3)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

よって，次のことが成り立つ。

座標と成分表示

2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

成分表示されたベクトルにおいて，x 成分は x 軸方向の移動量，y 成分は y 軸方向の移動量，z 成分は z 軸方向の移動量をそれぞれ表す。よって，成分表示されたベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の x 成分，y 成分，z 成分は，点Aから点Bへの移動において，x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向にそれぞれどれだけ移動するかを表している。

3 (1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 0,\ -2)$ のとき，$3\vec{a}-2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2) 2点 $\mathrm{A}(3,\ 4,\ -5)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 3)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

Point Pickup

成分表示されたベクトルの大きさと演算

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

$$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$

点の座標と成分表示

2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

第 5 講　PART3 確認問題

1　$\vec{a}=(1,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -1)$ のとき，$2\vec{a}+3\vec{b}$ の成分と大きさは

$$2\vec{a}+3\vec{b}=(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エ}})$$

$$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$$

である。

2　2点 A$(3,\ 4,\ -3)$，B$(2,\ 3,\ 1)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\boxed{\text{キク}},\ \boxed{\text{ケコ}},\ \boxed{\text{サ}})$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

PART3 ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

3 (1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 0,\ -2)$ のとき，$3\vec{a}-2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2) 2点 A$(3,\ 4,\ -5)$，B$(1,\ 2,\ 3)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

[解答]

(1) $3\vec{a}-2\vec{b}=3(1,\ -1,\ 1)-2(2,\ 0,\ -2)$

$=(3,\ -3,\ 3)+(-4,\ 0,\ 4)=(-1,\ -3,\ 7)$

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{59}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-3,\ 2-4,\ 3-(-5))=(-2,\ -2,\ 8)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+8^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

第5講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：8，イウ：−3，エ：3，オカ：82

[解説]

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -1)$ より

$$2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ 0,\ 3)+3(2,\ -1,\ -1)$$ [A]

$$=(2,\ 0,\ 6)+(6,\ -3,\ -3)$$

$$=\mathbf{(8,\ -3,\ 3)}$$

$$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{8^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{82}$$ [A]

[A] $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2,\ a_3)$
$=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ （k は実数）

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

2

[正解] キク：−1，ケコ：−1，サ：4，シ：3，
ス：2

[解説]

A$(3,\ 4,\ -3)$，B$(2,\ 3,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{AB}=(2-3,\ 3-4,\ 1-(-3))$$ [B]

$$=\mathbf{(-1,\ -1,\ 4)}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}$$ [B]

$$=\sqrt{18}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

[B] 2点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

$|\overrightarrow{AB}|$
$=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$